

IDEAL TEORİ Vize

19.11.2018

1 a) $S+I = \{a+b \mid a \in S, b \in I\}$

$\forall a_1+b_1, a_2+b_2 \in S+I \Rightarrow (a_1+b_1) - (a_2+b_2) = (a_1-a_2) + (b_1-b_2) \in S+I$

$\forall a_1+b_1, a_2+b_2 \in S+I \Rightarrow (a_1+b_1) \cdot (a_2+b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2 \in S+I$

alt kümedir

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $g \circ f$ hom. olduğundan

$$(g \circ f)(a+b) = (g \circ f)(a) + (g \circ f)(b) \\ = g(f(a)) + g(f(b))$$

g hom. old. dan

$$g(f(a)) + g(f(b)) = g(f(a) + f(b)) \text{ her iki eşitlikten}$$

$$g(f(a+b)) = g(f(a) + f(b)) \text{ } g \text{ 1-1 old. dan}$$

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ bulunur}$$

2 a) $(J \cap K)^c = f^{-1}(J \cap K)$

$$= f^{-1}(J) \cap f^{-1}(K)$$

$$= J^c \cap K^c$$

b) I, \mathbb{R} 'nin bir ideali olsun.

$$\sqrt{I} = \{r \in \mathbb{R} \mid \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n \in I\} \text{ } I \text{ invertible}$$

denir. $\sqrt{(24)} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = (6) \quad \sqrt{(63)} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = (21)$ bulunur

$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ bir otomorfizm olsun. $f(1) = 2, f(1) = 2$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n \quad f(-n) = -f(n) = -n \quad \forall m \in \mathbb{Z}, f(m) = m$$

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

$$\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ için } f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

dir.

$$4- (I:J) = \{r \in R \mid \forall n \in J \text{ için } rn \in I\}$$

$(I:J) = R$ olsun. $\forall n \in J$ için $1 \cdot n = n \in I$ olup

$J \subseteq I$ bulunur.

Tersine $J \subseteq I$ ise

$$(I:J) \subseteq R \text{ *acik}$$

$\forall n \in J \subseteq I$ ve $\forall r \in R$ için $rn \in I$ olup

$r \in (I:J)$ old. dan $R \subseteq (I:J)$ *doldurisyly

*ve *dny $R = (I:J)$ bulunur.